DIE TATE-VERMUTUNGEN FÜR HILBERT - BLUMENTHAL - FLÄCHEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem. -Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

CHRISTOPH KLINGENBERG

aus

RATZEBURG

BONN 1986

DIE TATE-VERMUTUNGEN FÜR HILBERT - BLUMENTHAL - FLÄCHEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

CHRISTOPH KLINGENBERG

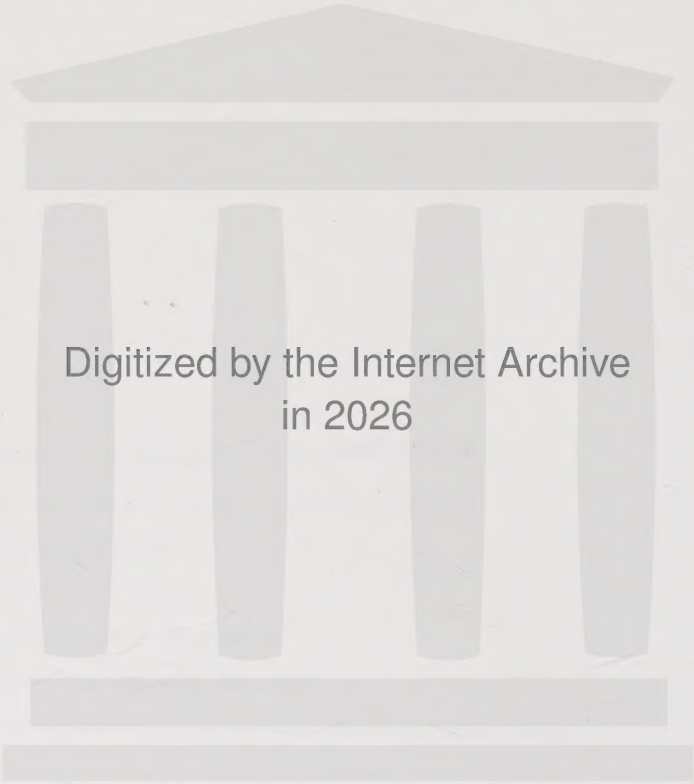
aus

RATZEBURG

BONN 1986

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn.
Referent: Prof. Harder
Korreferent: Prof. Hirzebruch
Tag der Promotion: 15. Mai 1986
Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

Meinen Eltern


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523710_0020

EINLEITUNG

Es sei X ein Schema definiert über $\mathbb{Q}$. Die Tate-Vermutungen geben eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine Kohomologieklasse von X algebraisch ist. Man kann sehr leicht notwendige Bedingungen für Algebraizität angeben, indem man die Eigenschaften eines algebraischen Zykels ξ in den verschiedenen Kohomologietheorien bestimmt (vergl. Kapitel 2):

(i) ξ ist Betti-rational,

(ii) ξ liegt in $F^p H^{2p}_{DR}(X/\mathbb{C})$,

(iii) es gibt eine endliche Erweiterung M von $\mathbb{Q}$, so daß ξ als Element von $H^{2p}_{et}(X \times \bar{\mathbb{Q}})(p)$ invariant unter $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/M)$ ist (siehe 2.2).

Kohomologieklassen ξ, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen, nennen wir Hodge-Zykeln und solche, die die Bedingung (iii) erfüllen, Tate-Zykeln definiert über M.

Die Hodge-Vermutung behauptet, alle Hodge-Zykeln sind algebraisch. Dies ist für Zykel der Kodimension d = 1 bewiesen und als Lefschetz-Kriterium für rationale (1,1)-Klassen bekannt. Die Tate-Vermutungen behaupten, alle Tate-Zykeln über M sind algebraisch und der Rang der algebraischen Zykeln der Kodimension d über M ist gleich der Polordnung der Hasse-Weil-Zetafunktion von $X \times_{\mathbb{Q}} M$ im Punkte s = d. Je größer die Körpererweiterung M, desto mehr Tate-Zykeln wird es über M geben, desto schwerer werden die Tate-Vermutungen zu beweisen.

Harder, Langlands und Rapoport beweisen in (HLR) die Tate-Vermutungen für Hilbert-Blumenthal-Flächen S (Definition 1.1.) über

einer abelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. In dieser Arbeit soll der Beweis für beliebige Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ erbracht werden, indem wir das Lefschetz-Kriterium für rationale (1,1)-Klassen benutzen. Unser Problem gliedert sich in zwei Teile:

Problem A: Identifikation der Tate-Klassen in der etalen Kohomologie.

Problem B: Beweis ihrer Algebraizität.

Die zweite Kohomologie wird in isotypische Komponenten $H^2(\pi)$, indiziert durch automorphe Formen π, aufgespalten. Die cuspidale automorphe Form π sei realisiert auf $H_\pi = H_{\pi_\infty} \otimes H_{\pi_f}$, dann zerfällt

$$H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f) \quad = \quad H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f) \otimes H_{\pi_f}$$

in das Tensorprodukt eines vierdimensionalen Galoismoduls und eines irreduziblen $G(A_f)$-Moduls. Nach (HLR, 4.5.4.) kann es in $H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f)$ nur dann Tate-Zykeln definiert über einer nichtabelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ geben, falls π_f vom CM-Typ ist, siehe 2.4. Der Raum der Tate-Zykeln in $H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f)$ ist dann zweidimensional. Um Problem B zu lösen, zeigen wir zunächst in Kapitel 3, daß CM-automorphe Formen instabil sind (Def. 3.4.1.). Das impliziert, daß der Raum $H^{1,1}(\pi_f)$ bei Einschränkung auf gewisse Zusammenhangskomponenten von S gleich dem $H^2(\pi_f)$ der Zusammenhangskomponente wird (Corollar 4.2.3.). Damit wird der Raum $H^{1,1}(\pi_f)$ Betti-rational, und wir haben einen zweidimensionalen Anteil von Hodge-Zykeln in $H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f)$ für eine CM-Form π gefunden. Nach dem Lefschetz-Kriterium sind diese Zykeln dann algebraisch.

Damit ist das Problem der Berechnung der Picardzahl, des Ranges der algebraischen Zykel, zurückgeführt auf die Abzählung der automorphen Formen, die Tate-Zykel liefern.

Ich danke Herrn Prof. Harder für die Anregung zu diesem Thema, für die freundliche Betreuung und viele Hinweise, insbesondere auf die Arbeit (L-L). Ferner danke ich Uwe Weselmann für zahlreiche Gespräche. Schließlich gilt mein Dank der Studienstiftung des deutschen Volkes für die Förderung während meines Studiums und für ein Promotionsstipendium, sowie der Rotary Foundation, die mir ein Studienjahr in Princeton ermöglichte.

1. Hilbert-Blumenthal-Flächen

1.1. Es seien F ein reellquadratischer Körper, $\mathcal{O}_F \subset F$ der Ring der ganzen Zahlen in F, $A_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times A_f$ bzw A_F der Ring der Adele über $\mathbb{Q}$ bzw F und $G := R_{F/\mathbb{Q}} GL_2$, also $G(\mathbb{Q}) = GL_2(F)$ und $G(A_{\mathbb{Q}}) = GL_2(A_F)$. Wähle

$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right\} \subset G(\mathbb{R}) \cong GL_2(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{R}),$$

dann ist $K_\infty = Z(\mathbb{R})^o \cdot [SO(2) \times SO(2)]$ mit $Z(\mathbb{R})^o = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. Eine offen-kompakte Untergruppe $K_f \subset G(A_f)$ bestimmt eine Shimuravarietät S_{K_f}, deren komplexe Punkte wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} S_{K_f}(\mathbb{C}) &= G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K_\infty \cdot K_f \\ &= G(\mathbb{Q}) \backslash [G(\mathbb{R}) / K_\infty \times G(A_f) / K_f]. \end{aligned}$$

Für $\acute{K}_f \subset K_f$ definiert die Projektion $S_{\acute{K}_f} \longrightarrow S_{K_f}$ einen inversen Limes

$$S(\mathbb{C}) := \varprojlim_{K_f} S_{K_f}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(A) / K_\infty.$$

Das Schema S ist quasi-kompakt und separiert, aber nicht von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, also eine proalgebraische Fläche. Für uns ist es häufig eleganter, S statt S_{K_f} zu betrachten; bei manchen Endlichkeitsargumenten müssen wir uns aber auf S_{K_f} zurückziehen.

DEFINITION. *S heißt die* **Hilbert-Blumenthal-Fläche** *(oder* **Hilbertsche Modulfläche***) zum reellquadratischen Körper F.*

1.2. Zusammenhangskomponenten.

1.2.1. Es seien $\tilde{G} := R_{F/\mathbb{Q}} SL_2$, $\tilde{K}_\infty = SO(2) \times SO(2)$ $= K_\infty \cap \tilde{G}(\mathbb{R})$. Eine offen-kompakte Untergruppe $\tilde{K}_f \subset \tilde{G}(A_f)$ bestimmt eine Shimuravarietät $\tilde{S}_{\tilde{K}_f}$, deren Punkte über $\mathbb{C}$ gegeben sind als:

$$\tilde{S}_{\tilde{K}_f}(\mathbb{C}) \quad = \quad \tilde{G}(\mathbb{Q})\backslash\tilde{G}(A)/\tilde{K}_\infty\tilde{K}_f \quad \cong \quad \Gamma\backslash\mathcal{H} \times \mathcal{H},$$

wobei $\Gamma := \tilde{K}_f \cap \tilde{G}(\mathbb{Q})$ eine Kongruenzuntergruppe von $\tilde{G}(\mathbb{R})$ bezeichnet. Hier ist $\tilde{G}(\mathbb{R})/\tilde{K}_\infty \cong \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, während $G(\mathbb{R})/K_\infty \cong (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \times (\mathbb{C} - \mathbb{R})$. Wegen starker Approximation für SL_2 ist $\tilde{S}_{\tilde{K}_f}(\mathbb{C})$ zusammenhängend.

1.2.2. Wir bilden wieder

$$\tilde{S}(\mathbb{C}) \quad := \quad \varprojlim_{K_f} \tilde{S}_{\tilde{K}_f}(\mathbb{C}) \quad = \quad \varprojlim_{\Gamma} \Gamma\backslash\mathcal{H} \times \mathcal{H} \quad = \quad \tilde{G}(\mathbb{Q})\backslash\tilde{G}(A)/\tilde{K}_\infty,$$

dann ist $\tilde{S}(\mathbb{C})$ auch zusammenhängend, (De), Prop. 2.1.7. Das Schema $\tilde{S}(\mathbb{C})$ ist die Faser über der Eins der Projektion

$$\det : S(\mathbb{C}) \longrightarrow I_F/\left(F^* \cdot (\mathbb{R}^2_{>0} \times \{1\})\right),$$

wobei I_F die Idele über F bezeichne. Setze

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in I_F/\left(F^* \cdot (\mathbb{R}^2_{>0} \times \{1\})\right) \right\},$$

dann gibt es für jedes c ∈ C eine Einbettung

$$\tau(c): \quad \tilde{S}(\mathbb{C}) \longrightarrow S(\mathbb{C})$$
$$g \longmapsto g.c$$

Bezeichne das Bild $\tau(c)(\tilde{S}(\mathbb{C}))$ mit $\tilde{S}^c(\mathbb{C})$. Dann ist $S(\mathbb{C}) = \coprod_{c \in C} \tilde{S}^c(\mathbb{C})$.

1.2.3. Das Schema $\tilde{S}(\mathbb{C})$ klassifiziert abelsche Flächen mit reeller Multiplikation und einigen Zusatzstrukturen. Shimura (Shi) zeigt mithilfe der modularen Interpretation, daß $\tilde{S}$ ein Modell über der maximal abelschen Erweiterung $\mathbb{Q}^{ab}$ von $\mathbb{Q}$ hat. Die Vereinigung $S(\mathbb{C})$ dieser $\tilde{S}(\mathbb{C})$ ist dann über $\mathbb{Q}$ definiert. Die Zusammenhangskomponenten von $S_{K_f}(\mathbb{C})$ sind hermitsche symmetrische Räume, nach (B-B) sind sie quasiprojektive Varietäten.

2. Kohomologie

2.1. Die verschiedenen Kohomologietheorien. Um die Hodge-Vermutung und die Tate-Vermutungen zu formulieren, brauchen wir drei Kohomologietheorien, vergl. (DMOS). Wir können uns dabei auf die Dimension zwei beschränken; in den Dimensionen eins und drei verschwindet die Kohomologie, siehe (H-V), Prop. II, 4.

Im Abschnitt 1.1. hatten wir S als inversen Limes der algebraischen Flächen S_{K_f} definiert; es ist für eine beliebige Kohomologietheorie

$$H^2(S) \quad = \quad \varprojlim_{K_f} H^2(S_{K_f}).$$

Ferner sei $H^2_{cusp}(S) := Im(H^2_c(S) \longrightarrow H^2(S))$ die cuspidale Kohomologie. Da wir nur $H^2_{cusp}(S)$ betrachten, lassen wir das Subskriptum 'cusp' künftig fort. Es bezeichne $H^2_B(S) := H^2(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ die (cuspidale) Betti-Kohomologie von S, die durch die komplexe Mannigfaltigkeitsstruktur von $S(\mathbb{C})$ definiert ist. Wir bekommen die Hodge-Zerlegung

$$H^2_B(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad = \quad \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(S),$$

indem wir die Kohomologie durch harmonische 2-Formen beschreiben und diese dann in (p,q)-Formen zerlegen. Für einen Körper $K \subset \mathbb{C}$ bezeichne $H^2_{DR}(S/K)$ die algebraische de Rham-Kohomologie, die mithilfe der algebraischen Differentialformen über K definiert wird. $H^2_{DR}(S/K)$ ist ein K-Vektorraum zusammen mit einer Hodge-

wird. $H^2_{DR}(S/K)$ ist ein K-Vektorraum zusammen mit einer Hodge-Filtrierung $F^pH^2_{DR}(S/K)$, $p \geq 0$. Über $\mathbb{C}$ haben wir einen Vergleichsisomorphismus

$$\Phi_{DR} : H^2_B(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow H^2_{DR}(S/\mathbb{C}),$$

so daß gilt:

$$\Phi_{DR}\Big(\bigoplus_{p \geq p} H^{p,q}(S)\Big) \quad = \quad F^pH^2_{DR}(S/\mathbb{C}),$$

vergleiche Th.1.4. in (DMOS).

BEMERKUNG :

Auf $H^2_B(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ haben wir außer der kanonischen Betti-rationalen Struktur noch die de Rham-rationale Struktur $\Phi^{-1}_{DR}(H^2_{DR}(S/\mathbb{Q}))$. Diese beiden Strukturen unterscheiden sich um die transzendent definierten Perioden (DMOS). Die Hodge-Filtrierung $F^pH^2_{DR}(S/\mathbb{Q})$ ist de Rham-rational.

Die etale Kohomologie

$$H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}}) \quad = \quad \Big(\varprojlim_m H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

ist gleich dem restringierten Produkt über alle Primzahlen l der $H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_l)$ bezüglich $H^2(S \times \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_l)$. Definiere

$$H^2_A(S) \quad := \quad H^2_{DR}(S/\mathbb{C}) \times H^2_{et}(S \times \mathbb{C}),$$

dann haben wir einen Vergleichsisomorphismus

$$\Phi = \Phi_{DR} \times \Phi_{et} : \quad H_B^2(S) \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{C} \times A_f) \longrightarrow H_A^2(S),$$

vergl. (DMOS), p. 19.

DEFINITION. *Eine Kohomologieklasse ξ heißt* **Betti-rational**, *falls ξ in dem Unterraum*

$$\Phi\big(H_B^2(S)\big) \text{ liegt.}$$

Da S über $\mathbb{Q}$ definiert ist, bekommen wir eine Operation ρ der Galoisgruppe auf $H_{et}^2(S \times \bar{\mathbb{Q}})$,

$$\rho : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL(H_{et}^2(S \times \bar{\mathbb{Q}})).$$

Diese drei Kohomologietheorien ordnen einer Kohomologieklasse ξ also drei Eigenschaften zu :

- Betti-Rationalität
- Hodge-Filtrierungstyp
- Verhalten unter der Galoisoperation.

Mithilfe dieser drei Eigenschaften soll Algebraizität charakterisiert werden.

DEFINITION. *Es sei $S(S \times \bar{\mathbb{Q}})$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von den irreduziblen algebraischen Kurven auf $S \times \bar{\mathbb{Q}}$. Dann gibt es in allen*

drei Kohomologietheorien eine Chernklassenabbildung

$$c : S(S \times \bar{Q}) \longrightarrow H^2(S \times \bar{Q}).$$

$\xi \in H^2(S \times \bar{Q})$ *heißt* **algebraisch** *oder* **algebraischer Zykel**, *falls* ξ *in dem vom Bild von c erzeugten Unterraum liegt.*

BEMERKUNG :

Da die Chernklassenabbildungen mit dem Vergleichsisomorphismus Φ verträglich sind (DMOS, p. 21), können wir von algebraischen Zykeln in $H^2_A(S)$ reden.

2.2 Die Vermutungen von Hodge und Tate.

DEFINITION. *Eine Kohomologieklasse* $\xi = (\xi_{DR}, \xi_{et})$ *in* $H^2_A(S)$ *heißt* **Hodge-Zykel**, *falls*

(a) ξ *Betti-rational und*

(b) $\xi_{DR} \in F^1 H^2_{DR}(S/\mathbb{C})$ *ist.*

Bezeichne den Raum der Hodge-Zykeln mit $\mathcal{HZ}(S)$ *oder einfach mit* $\mathcal{HZ}$.

BEMERKUNG 2.2.1.

(i) Setzt man Bedingung (a) voraus, so ist Bedingung (b) offensichtlich äquivalent zu

(b') $\xi_{DR} \in \Phi_{DR}(H^{1,1}(S))$.

(ii) Standardbeispiele für Hodge-Zykel sind die algebraischen Zykel. Es gilt sogar:

SATZ 2.2.2.(Lefschetz-Kriterium für rationale (1,1)-Klassen).

Alle Hodge-Zykeln auf $S(\mathbb{C})$ sind algebraisch.

Für eine Beweis siehe z.B. (G-H), p. 169.

Für beliebige irreduzible glatte projektive Schemata X über $\mathbb{Q}$ definiert man die Hodge-Zykeln der Dimension p als die Betti-rationalen Elemente von $F^p H^{2p}_{DR}(X/\mathbb{C})$. Die **Hodge-Vermutung** behauptet, daß alle Hodge-Zykeln auf X algebraisch sind.

Es sei $\mathbb{Q} \subset M \subset \bar{\mathbb{Q}}$ eine endliche Galoiserweiterung und $\alpha : Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow I_{\mathbb{Q},f}$ der Tate-Charakter, definiert als das Produkt der l-adischen zyklotomischen Charaktere.

DEFINITION. *Die Elemente von*

$$\mathcal{TZ}(M) := \{ \xi \in H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}}) \mid \rho(\sigma)\xi = \alpha^{-1}(\sigma)\xi \text{ für alle } \sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/M) \}$$

heißen **Tate-Zykeln** *definiert über M.*

BEMERKUNG 2.2.3.

(i) Falls M normal über $\mathbb{Q}$ ist, so ist der Raum $\mathcal{TZ}(M)$ invariant unter $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

(ii) Bezeichne mit $H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(1)$ den Tate-Twist der etalen Kohomologie, dann sind die Tate-Zykeln über M genau die $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/M)$-invarianten Elemente von $H^2_{et}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(1)$.

Entsprechend bezeichnen ρ_{K_f} und $\mathcal{TZ}(M)_{K_f}$ die Galoisdarstellung bzw. die Tate-Zykeln für S_{K_f}, ferner sei

$$L_M(s,\rho_{K_f}) \quad := \quad \prod_p L_p(s,\rho_{K_f}) \quad := \quad \prod_p \det\,(1-\rho_{K_f}(\Phi_p^{-1})Np^{-s})^{-1}$$

die Zetafunktion von S_{K_f} über M, wobei sich das Produkt über alle unverzweigten Primstellen p von M erstreckt.

Die **Tate-Vermutungen** behaupten nun :

1. Die Tate-Zykel $\mathcal{TZ}(M)$ sind algebraisch.

2. Die Dimension von $\mathcal{TZ}(M)_{K_f}$ ist gleich der Polordnung von $L_M(s,\rho_{K_f})$ im Punkte $s = 2$.

Bemerkung : Diese Polordnung ist unabhängig von den endlich vielen Primstellen p, die im Produkt weggelassen wurden.

Unser Problem gliedert sich in zwei Teile:

Problem A: Identifikation der Tate-Zykeln

Problem B: Beweis ihrer Algebraizität.

Das Problem B wird in Kapitel 4 dadurch gelöst, daß wir zeigen, daß jeder Tate-Zykel schon ein Hodge-Zykel und damit algebraisch ist. Doch zunächst wollen wir Problem A präzisieren.

2.3. Isotypische Komponenten. Auf die arithmetische Frage nach den Invarianten der Galoisdarstellung ρ wird die Theorie der automorphen Formen angewandt, indem man die cuspidale totale Kohomologie

nach der Operation der Heckealgebra zerlegt . Es sei

$$\Pi_0(G(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \epsilon_i \in \{+1, -1\} \right\} \subset G(\mathbb{R}),$$

dann definiert die Multiplikation von rechts mit $g = (g_\infty, g_f) \in \Pi_0(G(\mathbb{R})) \times G(A_f)$ eine Abbildung

$$S_{K_f} \longrightarrow S_{g_f^{-1} K_f g_f},$$

die eine Abbildung zwischen den entsprechenden Kohomologiegruppen induziert. Damit wird $H^2_A(S)$ zu einem $\Pi_0(G(\mathbb{R})) \times G(A_f)$-Modul. Wir zerlegen

$$H^2_A(S) = \bigoplus_{\xi_\infty, \pi_f} H^2_A(S)(\xi_\infty, \pi_f)$$

in die isotypischen Komponenten der irreduziblen Darstellungen von $\Pi_0(G(\mathbb{R})) \times G(A_f)$. Dabei ist $\xi_\infty : \Pi_0(G(\mathbb{R})) \to \{\pm 1\}$ ein Charakter und $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ eine (unendlichdimensionale) cuspidale automorphe Darstellung, realisiert auf einem Raum $H_\pi = H_{\pi_\infty} \otimes H_{\pi_f}$.
Schreibe

$$H^2_A(S)(\pi_f) := \bigoplus_{\xi_\infty} H^2_A(S)(\xi_\infty, \pi_f),$$

dann können wir die isotypischen Komponenten zerlegen:

$$\begin{aligned} H^2_A(S)(\pi_f) &= Hom_{G(A_f)}(H_{\pi_f}, H^2_A(S)) \otimes H_{\pi_f} \\ &=: H^2_{A,\infty}(S)(\pi_f) \otimes H_{\pi_f}. \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt die Frage, in wieweit sich die Strukturen von $H^2_A(S)$ auf die Homomorphismen $Hom_{G(A_f)}(H_{\pi_f}, H^2_A(S))$ übertragen.

2.3.1. Betti – Rationalität

$H^2_A(S)$ ist ein freier $\mathbb{C} \times A_{\mathbb{Q},f}$-Modul, wobei $A_{\mathbb{Q},f}$ die endlichen Adele über $\mathbb{Q}$ bezeichne.

LEMMA.

$Hom_{G(A_f)}(H_{\pi_f}, H^2_A(S)) = H^2_{A,\infty}(S)(\pi_f)$ ist über einer endlichen Erweiterung $\mathbb{Q}(\pi_f)$ von $\mathbb{Q}$ definiert. Damit ist $H^2_{A,\infty}(S)(\pi_f)$ ein freier $\mathbb{C} \times A_{\mathbb{Q}(\pi_f),f}$-Modul.

Beweis : Dieser Raum ist schon über $\bar{\mathbb{Q}}$ definiert, denn die Operation von $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ faktorisiert über die endlich-dimensionalen $H^2_A(S_{K_f})(\pi_f)$ und operiert also mit endlichen Orbits auf der Menge der π_f. Damit gibt es eine endliche Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\pi_f)$ von $\mathbb{Q}$, so daß $\pi_f^\sigma = \pi_f$ für alle $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\pi_f))$ gilt. Dabei ist π_f^σ diejenige irreduzible Darstellung, mit der $G(A_f)$ auf $(H^2_A(S)(\pi_f))^\sigma$ operiert. Der Modul $H^2_A(S)(\pi_f)$ ist also schon über $\mathbb{Q}(\pi_f)$ definiert.

2.3.2. Die Hodge – Zerlegung

Schreibe $H^2_{A,\infty}(S)(\pi_f) = H^2_{DR,\infty}(S/\mathbb{C})(\pi_f) \times H^2_{et,\infty}(S \times \mathbb{C})(\pi_f)$. Dann kann man den de Rham-Anteil mit der g-K_∞-Kohomologie berechnen:

$$H^2_{DR,\infty}(S/\mathbb{C})(\pi_f) \quad = \quad H^2(g, K_\infty, H^\infty_\pi).$$

Dabei ist g die Liealgebra von G, $H_{\pi_\infty} \otimes H_{\pi_f}$ der Raum der Darstellung $\pi_\infty \otimes \pi_f$ und $H^\infty_\pi \subset H_{\pi_\infty}$ die $\mathcal{C}^\infty$-Vektoren. Nach dem Standard-

Verschwindungssatz der g-K_∞-Kohomologie (B-W, I, Th.5.3.) tragen nur die automorphen Formen π zur Kohomologie bei, bei denen π_∞ die erste Darstellung der diskreten Serie ist. Schreibe Z für das Zentrum von $GL_2(\mathbb{R})$. Zerlege $\pi_\infty = \pi_{\infty,1} \otimes \pi_{\infty,2}$ und $H^\infty_\pi = H^\infty_{\pi,1} \otimes H^\infty_{\pi,2}$ und bezeichne mit $gl(2)$, $so(2)$ und z die Liealgebren von $GL_2(\mathbb{R})$, $SO(2)$ und Z. Dann gilt nach der Künnethformel (B-W, I, 1.3.):

$$\begin{aligned} H^2(g, K_\infty, H^\infty_\pi) &= H^1(gl(2), Z.SO(2), H^\infty_{\pi,1}) \\ &\quad \otimes H^1(gl(2), Z.SO(2), H^\infty_{\pi,2}) \\ &= Hom_{Z.SO(2)}(gl(2)/(z.so(2)), H^\infty_{\pi,1}) \\ &\quad \otimes Hom_{Z.SO(2)}(gl(2)/(z.so(2)), H^\infty_{\pi,2}). \end{aligned}$$

LEMMA. *$H^2_{DR,\infty}(S/\mathbb{C})(\pi_f)$ ist vierdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Damit ist $H^2_{A,\infty}(S)(\pi_f)$ ein freier $\mathbb{C} \times A_{Q(\pi_f),f}$-Modul vom Rang 4.*

Beweis : Wähle als Basis $d_{+,+}$, $d_{+,-}$, $d_{-,+}$, $d_{-,-}$ die Elemente von $H^2(g, K_\infty, H^\infty_\pi)$, die an den beiden unendlichen Stellen den Quotienten $gl(2)/so(2)$ entweder auf den holomorphen (Pluszeichen) oder auf den anti-holomorphen (Minuszeichen) Vektor des kleinsten Gewichts abbilden.

COROLLAR.

(i) Die Vektoren $d_{+,+}$, $d_{+,-}$, $d_{-,+}$ bilden eine Basis von $F^1 H^2_{DR,\infty}(S/\mathbb{C})(\pi_f)$.

(ii) Unter dem Vergleichsisomorphismus Φ_{DR} bilden die Vektoren $\Phi_{DR}^{-1}(d_{+,-})$ und $\Phi_{DR}^{-1}(d_{-,+})$ eine Basis von $H_{\infty}^{1,1}(S)(\pi_f)$ in $H_{B,\infty}^2(S)(\pi_f)$.

Da $H_A^2(S)(\pi_f)$ über $\mathcal{Q}(\pi_f)$ und nicht über $\mathcal{Q}$ definiert ist, ist der Durchschnitt mit den Hodge-Zykeln $\mathcal{H}Z$ leer, falls $\mathcal{Q}(\pi_f) \neq \mathcal{Q}$ ist. Deshalb summieren wir über den $Gal(\mathcal{Q}(\pi_f)/\mathcal{Q})$-Orbit von π_f.

DEFINITION.

$$\mathcal{H}Z((\pi_f)) \quad := \quad \mathcal{H}Z \quad \cap \bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathcal{Q}(\pi_f)/\mathcal{Q})} H_A^2(S)(\pi_f^{\sigma}).$$

2.3.3. Die Galoisdarstellung

Da die $G(A_f)$-Operation mit der Galoisdarstellung vertauscht, bekommen wir vierdimensionale Darstellungen:

$$\rho(\pi_f): \quad Gal(\bar{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}) \longrightarrow GL\big(H_{et,\infty}^2(S \times \bar{\mathcal{Q}})(\pi_f)\big).$$

Definiere

$$\mathcal{T}Z(M)(\pi_f) \quad := \quad \mathcal{T}Z(M) \cap H_{et}^2(S \times \bar{\mathcal{Q}})(\pi_f),$$

dann läßt sich $\mathcal{T}Z(M)(\pi_f)$ aufspalten:

$$\mathcal{T}Z(M)(\pi_f) \quad = \quad \mathcal{T}Z_{\infty}(M)(\pi_f) \otimes H_{\pi_f}.$$

Hier stellt sich das gleiche Problem wie im vorangegangenen Abschnitt: die Elemente von $\mathcal{T}Z_{\infty}(M)(\pi_f)$ kann man strenggenommen nicht als

Tate-Zykeln bezeichnen, da der Raum der $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-Darstellung $\rho(\pi_f)$ nicht über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$, sondern erst über $\mathbb{Q}(\pi_f)$ definiert ist. Deshalb setzen wir:

$$H^2_A(S)((\pi_f)) := \bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\pi_f)/\mathbb{Q})} H^2_A(S)(\pi_f^\sigma), \quad \text{und}$$

$$\rho((\pi_f)) := \bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\pi_f)/\mathbb{Q})} \rho(\pi_f^\sigma).$$

Damit ist $\rho((\pi_f))$ eine über $\mathbb{Q}$ definierte $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-Darstellung vom Rang $4 \cdot [\mathbb{Q}(\pi_f) : \mathbb{Q}]$. Erst die Elemente von

$$\mathcal{T}Z_\infty(M)((\pi_f)) := \bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\pi_f)/\mathbb{Q})} \mathcal{T}Z_\infty(M)(\pi_f^\sigma)$$

sind Tate-Zykeln im strengen Sinne.

2.4. Die Identifikation der Tate-Zykeln.

Wir präzisieren jetzt Problem A: für welche π ist $\mathcal{T}Z(M)(\pi_f) \neq 0$ für hinreichend großes M ? Diese Frage beantworten (HLR), indem sie mithilfe der Schnittpaarung auf $H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f)$ die vierdimensionale Galoisdarstellung über F in das Produkt zweier zweidimensionaler Darstellungen zerlegen:

$$\rho(\pi_f) \mid Gal(\bar{\mathbb{Q}}/F) = \rho_1(\pi_f) \otimes \rho_2(\pi_f).$$

Durchläuft M einen Turm von endlichen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, so wird die Folge der Untermoduln $\mathcal{T}Z_\infty(M)(\pi_f)$ in dem Modul $H^2_{et,\infty}(S \times \bar{\mathbb{Q}})(\pi_f)$ vom Rang vier über $A_{\mathbb{Q}(\pi_f),f}$ stationär. Setze

$\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f) := \mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(M)(\pi_f)$ für das kleinste normale M, für das die Folge stationär wird. Die Tate-Zykeln $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f)$ sind dann über M definiert. (HLR, 4.5.4.) analysieren das Reduzibilitätsverhalten der zweidimensionalen Darstellungen $\rho_i(\pi_f)$ und kommen zu dem Ergebnis, daß $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f)$ höchstens Rang zwei haben kann. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Rang $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f) = 1$. Dann operiert $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ nach Bemerkung 2.2.3.(i) durch einen Charakter auf $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f)$. Damit ist $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f)$ über einer endlichen abelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ definiert, und durch das Reziprozitätsgesetz kennt man $\rho_1(\pi_f)$ und $\rho_2(\pi_f) = \rho_1(\pi_f)^\sigma$ für ein beliebiges $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ mit $\sigma \mid F \neq id$. Daher zerfällt

$$\rho(\pi_f) \quad = \quad \rho_{(3)}(\pi_f) \oplus \rho_{Tate,1}(\pi_f)$$

in einen dreidimensionalen und einen eindimensionalen Anteil $\rho_{Tate,1}(\pi_f)$. Über einer abelschen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ operiert $\rho_{Tate,1}(\pi_f)$ dann wie der Tate-Charakter α^{-1}.

2. Rang $\mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty(\pi_f) = 2$. Dann ist π vom CM-Typ, siehe (HLR), Satz 4.5.4. Es gibt dann einen Charakter $\omega : I_F/F^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\pi \cong \pi \otimes \omega$. Nach (La), Lemma 7.17, ist dann ω von der Ordnung 2 und definiert somit eine quadratische Erweiterung E von F. Der Körper E muß rein imaginär sein, und es gibt einen Heckecharakter $\theta : I_E/E^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, der nicht über die Norm $N_{E/F}$ faktorisiert, so daß $\pi = \pi(\theta)$. Hier ist $\pi(\theta)$ die mithilfe der Weildarstellung aus θ konstruierte automorphe Form, vergl (J-L), (Ge), Kap.7. Im Abschnitt 3.3. werden wir die lokalen

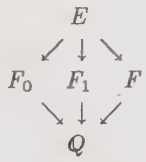
Komponenten einer CM-Form genauer beschreiben. Wir folgen (HLR), Kap. 4.7. und sammeln weitere Informationen über θ : interpretiere θ via Klassenkörpertheorie als Charakter auf $Gal(\bar{Q}/E)$, dann ist für $\pi = \pi(\theta)$

$$\rho_1(\pi_f) \quad = \quad Ind_{Gal(\bar{Q}/E)}^{Gal(\bar{Q}/F)}\theta \quad =: \quad Ind_E^F\theta.$$

Fixiere über den beiden Einbettungen von F nach $\mathbb{R}$ zwei Einbettungen i, j von E nach $\mathbb{C}$. Nach 2.3.2. sind $\pi_{\infty,1}$ und $\pi_{\infty,2}$ erste diskrete Serienendarstellungen, damit ist ohne Einschränkung $\theta_\infty(z,\acute{z}) = z \cdot \acute{z}$. Wähle $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q)$ mit $\sigma \mid F$ nicht-trivial und $\sigma \circ i = j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \rho(\pi_f) \mid F &= \rho_1(\pi_f) \otimes \rho_2(\pi_f) \\ &= Ind_E^F\theta \otimes Ind_E^F\theta^\sigma, \\ \text{und somit } \rho(\pi_f) \mid E \cdot E^\sigma &= \theta\theta^\sigma \oplus \theta\bar{\theta}^\sigma \oplus \bar{\theta}\theta^\sigma \oplus \bar{\theta}\bar{\theta}^\sigma. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet der Querstrich die komplexe Konjugation auf E. Damit es einen zweidimensionalen Anteil von Tate-Zykeln geben kann, müssen zwei dieser vier Charaktere im Unendlichen vom Typ α^{-1} sein. Dies ist nur möglich, falls $E = E^\sigma$ und $Q \subset E$ eine biquadratische Erweiterung ist. Damit gibt es zwei imaginär-quadratische Erweiterungen F_0 und F_1 von Q, (wir setzen $\sigma \mid F_0 = id$), so daß wir bekommen:



Für die Einbettungen i, j von E gibt es zwei Wahlmöglichkeiten, die den beiden Einbettungen von F_0 entsprechen. Wähle eine solche Einbettung. Dann sind $\theta\bar{\theta}^\sigma$ und $\bar{\theta}\theta^\sigma$ die beiden Charaktere vom Typ α^{-1}; diese Charaktere kann man auf $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/F_1)$ fortsetzen, da sie invariant unter $Gal(E/F_1)$ sind. Das nichttriviale Element von $Gal(F_1/\mathbb{Q})$, also die komplexe Konjugation, vertauscht diese Charaktere. Damit gibt es einen Charakter χ endlicher Ordnung von $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/F_1)$, so daß gilt:

$$\rho(\pi_f) \mid \mathcal{T}\, Z_\infty(\pi_f) \quad = \quad Ind_{F_1}^{\mathbb{Q}} \alpha^{-1}\chi.$$

Über der χ entsprechenden Erweiterung $F_1(\chi)$ von F_1 besteht die Summe der Eigenräume von $\bar{\theta}\theta^\sigma$ und $\theta\bar{\theta}^\sigma$ also aus Tate-Klassen, und die Galoisdarstellung auf diesem Raum wird durch $Ind_{F_1}^{\mathbb{Q}} \alpha^{-1}\chi$ beschrieben. Über $F_1(\chi)$ zerfällt

$$\rho(\pi_f) \quad = \quad \rho_{(2)}(\pi_f) \oplus \rho_{Tate,2}(\pi_f)$$

in einen zweidimensionalen Anteil von transzendenten Klassen und einen zweidimensionalen Anteil von Tate-Zykeln. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten :

a. Die Körpererweiterung $F_1(\chi)$ ist abelsch über $\mathbb{Q}$. Das ist gleichbedeutend mit $\chi = \chi^\sigma$. Dann heißt $\pi(\theta)$ **abelsche CM-Form**.

b. Die Körpererweiteung $F_1(\chi)$ ist nicht-abelsch, sondern dihedral. Dann nennen wir $\pi(\theta)$ **dihedrale CM-Form**.

Damit ist das Problem A gelöst. Zusammenfassend gilt:

THEOREM A (HLR). *Es sei π eine CM-Form. Falls $\mathcal{T}\, Z_\infty(\pi_f) \neq 0$, so*

ist

$$\mathrm{Rang}_{A_{\mathbb{Q}(\pi_f),f}} \mathcal{T}\mathcal{Z}_\infty((\pi_f)) \quad = \quad 2 \cdot [\mathbb{Q}(\pi_f) : \mathbb{Q}]$$

Das Problem B wird im abelschen Fall dadurch gelöst, daß man alle Tate-Zykeln durch Einbettung von Modulkurven konstruiert, siehe (HLR), Kapitel 3. Im nicht-abelschen Fall zeigen wir, daß alle Tate-Zykeln schon Hodge-Zykeln sind. Dafür brauchen wir die sog. Instabilität der CM-Formen.

3. Instabile automorphe Formen

Wir haben die Hilbert-Blumenthal-Fläche S als Vereinigung von Flächen $\tilde{S}^c$ geschrieben. Um die Kohomologie dieser Zusammenhangskomponenten zu beschreiben, müssen wir automorphe Formen π von G auf $\tilde{G}$ einschränken. Man faßt die irreduziblen Komponenten der Einschränkung zum **L-Paket** Π von π zusammen. Gewöhnlich kommen die Elemente von Π mit gleicher Multiplizität im Raum der Spitzenformen auf $\tilde{G}$ vor, nur für CM-Formen π passiert Folgendes: nur die Hälfte der Elemente von Π sind automorphe Formen auf $\tilde{G}$, die andere Hälfte 'verschwindet' sozusagen. Im Abschnitt 3.4. werden wir einen elementaren Beweis für diesen Satz aus (L-L) angeben. Vorher wollen wir das entsprechende lokale Problem behandeln. Die L-Pakete sind ein zentraler Begriff in der folgenden Vermutung.

3.1. Die lokale Langlands-Korrespondenz.

Vergleiche hierzu (Bo). Bis zum Abschnitt 3.3. einschließlich sei F ein **lokaler Körper** (nicht-diskret, lokal-kompakt, Charakteristik Null), W_F die absolute Weilgruppe und in diesem Abschnitt 3.1. G eine zusammenhängende reduktive Gruppe über F. Mit $\Phi(G)$ bezeichnen wir die Äquivalenzklassen zulässiger Homomorphismen $\phi : W_F \to G^L$ in die L-Gruppe von G. Die lokale Langlands-Korrespondenz ordnet jedem $[\phi] \in \Phi(G)$ eine endliche Teilmenge Π_ϕ von irreduziblen zulässigen Darstellungen von $G(F)$ zu, so daß einige zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind, wie z.B. Verträglichkeit mit Twisten eindimensionaler Darstellun-

gen, Verträglichkeit der zentralen Charaktere, Funktorialität, siehe (Bo), Ch. 3. Die Menge Π_ϕ nennt man das **L-Paket** zu ϕ. Zwei Darstellungen π und $\acute{\pi}$ in demselben L-Paket heißen **L-ununterscheidbar**; π und $\acute{\pi}$ haben dann dieselben L- und ϵ-Faktoren und sind sozusagen arithmetisch äquivalent (Lab). Im Fall $G = GL_2$ besteht Π_ϕ immer aus einem Element, während im Fall $G = SL_2$ das L-Paket Π_ϕ ein, zwei oder vier Elemente enthalten kann. Hier sind π und $\acute{\pi}$ genau dann L-ununterscheidbar, wenn sie Komponenten der Restriktion **einer** Darstellung von GL_2 sind. Wir lassen künftig den Index ϕ fort und bezeichnen für $G = SL_2$ die Elemente von Π mit $\tilde{\pi}$.

3.2. Lokale L-Ununterscheidbarkeit.

Wir formulieren einige einfache Ergebnisse aus der Darstellungstheorie, vergleiche (L-L, Abschnitt 2) und (G-K, Lemma 2.1.).

LEMMA 3.2.1. *Eine irreduzible Darstellung π von $G(F)$ zerfällt unter Einschränkung auf $\tilde{G}(F)$ in endlich viele irreduzible Komponenten, die paarweise nicht äquivalent sind.*

Beweis : Da die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in F^\star \right\} \cdot \tilde{G}(F)$ in $G(F)$ endlichen Index hat, kann man ein Induktionsargument anwenden. Die Multiplizität-Eins-Aussage folgt aus der Eindeutigkeit des lokalen Whittakermodells für G.

In wieviele Komponenten kann π zerfallen ? Sei $\tilde{\pi}$ eine irreduzible Komponente von $\pi \mid \tilde{G}(F)$, dann bekommt man die anderen Komponenten,

indem man $\tilde{\pi}$ mit Elementen aus $G(F) - \tilde{G}(F)$ twistet: $g \in G(F)$ definiert

$$\tilde{\pi}^g : \quad h \mapsto \tilde{\pi}(ghg^{-1})$$

für $h \in \tilde{G}(F)$. Wir bezeichnen deshalb mit

$$G(\tilde{\pi}) \quad := \quad \{g \in G(F) \mid \quad \tilde{\pi}^g \cong \tilde{\pi}\}$$

den Stabilisator dieser Operation auf dem L-Paket. Ferner bezeichnen wir für eine irreduzible Darstellung π von $G(F)$ mit $X(\pi)$ die Menge aller Charaktere ω von $G(F)/\tilde{G}(F)$ mit $\pi \otimes \omega \cong \pi$. Dann hat ω Ordnung 2 (oder 1), weil er trivial auf den Quadraten $det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ist. Es bezeichne $| M |$ die Mächtigkeit einer Menge M.

LEMMA 3.2.2. *Es sei $\tilde{\pi}$ eine irreduzible Komponente von $\pi \mid \tilde{G}(F)$. Dann gilt:*

(i) $X(\pi) = \{\omega : G(F)/\tilde{G}(F) \longrightarrow \mathbb{C} \mid \omega \text{ trivial auf } G(\tilde{\pi})\}$

(ii) $| X(\pi) | = | \Pi |$.

Beweis : Schreibe $\pi \mid \tilde{G}(F) = \tilde{\pi}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{\pi}_r$ als Summe irreduzibler Darstellungen mit $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}$. Entsprechend zerfällt der Raum von π :

$$H_\pi = H_{\tilde{\pi}_1} \oplus \cdots \oplus H_{\tilde{\pi}_r}.$$

$H_{\tilde{\pi}_1}$ ist invariant unter $G(\tilde{\pi})$; bezeichne mit π_1 die Darstellung von $G(\tilde{\pi})$ auf $H_{\tilde{\pi}_1}$, dann ist

$$\pi = Ind(G(F), G(\tilde{\pi}), \pi_1).$$

Damit folgt $r = [G(F) : G(\tilde{\pi})]$ und die Inklusion $\supset$ von (i).
Umgekehrt sei $\omega \in X(\pi)$ und V ein Verkettungsoperator von π und $\pi \otimes \omega$. Dann operiert V nach Schurs Lemma als Skalar auf $H_{\tilde{\pi}_i}$ für $i = 1 \ldots r$, also folgt $\pi_1 = \pi_1 \otimes \omega$. Damit ist ω trivial auf $G(\tilde{\pi})$.
Mit ähnlichen Argumenten beweist man eine Umkehrung des Lemmas:

LEMMA 3.2.3. *Angenommen, $\tilde{\pi}$ kommt als irreduzible Komponente in der Restriktion zweier Darstellungen π und $\acute{\pi}$ von $G(F)$ vor. Dann gibt es einen Charakter λ trivial auf $G(\tilde{\pi})$ mit $\pi \cong \acute{\pi} \otimes \lambda$.*

3.3. Anwendung auf lokale CM-Formen.

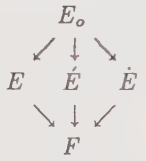
3.3.1. *$F = \mathbb{R}$.* Die diskrete Seriendarstellungen π sind genau die Darstellungen $\pi(\theta)$, wobei θ ein Charakter von $\mathbb{C}^*$ ist. Dann gilt $\pi \cong \pi \otimes \omega$, wobei $\omega = \text{sign} : \mathbb{R}^* \to \{\pm 1\}$ der quadratische Charakter ist, der $\mathbb{C}$ 'definiert'. Die CM-Formen im Unendlichen sind also genau die Darstellungen der diskreten Serie. Es sei $G^+(\mathbb{R}) := \{g \in G(\mathbb{R}) \mid \omega(\det g) = 1\}$ die Zusammenhangskomponente von $G(\mathbb{R})$, dann zerfällt $\pi \mid G^+(\mathbb{R})$ in zwei irreduzible Darstellungen, die erzeugt werden von dem holomorphen bzw. anti-holomorphen Vektor des kleinsten Gewichts. Denn das Element $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, das diese beiden Vektoren vertauscht, liegt nicht in $G^+(\mathbb{R})$. Da $G^+(\mathbb{R}) = Z(G(\mathbb{R})) \cdot \tilde{G}(\mathbb{R})$, bleiben die Einschränkungen dieser Komponenten auf $\tilde{G}(\mathbb{R})$ irreduzibel.

3.3.2. *F nicht – archimedisch.* Hier sind, außer in Charakteristik zwei, die CM-Formen genau die supercuspidalen Darstellungen und die-

jenigen Darstellungen $\pi(\mu_1, \mu_2)$ der Hauptserie, für die μ_1/μ_2 von der Ordnung zwei ist. Es sei wieder ω der Charakter der Ordnung zwei mit $\pi \cong \pi \otimes \omega$, der die quadratische Erweiterung E von F definiert und $G^+(F) := \{g \in G(F) \mid \omega(\det g) = 1\}$. Dann zerfällt

$$\pi \mid G^+(F) = \pi^+ \oplus \pi^-$$

in zwei irreduzible Komponenten. Die Darstellungen π^+ und π^- sind nicht äquivalent, aber dafür ist $\pi^+ \cong (\pi^-)^g$ für $g \in G(F) - G^+(F)$.
Jetzt schränken wir auf $\tilde{G}(F)$ ein. Angenommen, $\pi^+ \mid \tilde{G}(F)$ zerfällt in mehrere irreduzible Komponenten, dann gibt es nach Abschnitt 3.2. einen Charakter η von F der Ordnung 2 mit $\eta \in X(\pi)$, also $\pi \cong \pi \otimes \eta$. Der Charakter η definiere $\acute{E}$, dann ist $E_o := E \cdot \acute{E}$ eine biquadratische Erweiterung von F:



Es sei $\tilde{\eta} := \eta \cdot N_{E/F}$, dann ist $\tilde{\eta}$ also der Charakter auf E, der E_o definiert. Ferner sei das nicht-triviale Element von $Gal(E/F)$ mit einem Querstrich bezeichnet und $\bar{\theta}(x) := \theta(\bar{x})$. Wir zeigen, daß $\theta \cdot \tilde{\eta} = \bar{\theta}$, also $\tilde{\eta} = \theta/\bar{\theta}$. Wegen $\pi(\theta \cdot \tilde{\eta}) = \pi(\theta) \otimes \eta = \pi(\theta)$ kann $\theta \cdot \tilde{\eta}$ nur θ oder $\bar{\theta}$ sein, da $\tilde{\eta}$ Ordnung zwei hat, folgt $\theta \cdot \tilde{\eta} = \bar{\theta}$.
Umgekehrt habe $\theta/\bar{\theta}$ Ordnung zwei. Dann steigt $\theta/\bar{\theta}$ als Charakter der

Ordnung zwei auf $N_{E/F}E^\star \subset F^\star$ ab, wir erweitern $\theta/\bar{\theta}$ zu einem Charakter η von $F^\star$, dann ist $\pi(\theta) \otimes \eta = \pi(\theta)$, also $\eta \in X(\pi)$.

Zusammenfassend: Das lokale L-Paket einer automorphen Form $\pi = \pi(\theta)$ vom CM-Typ enthält zwei oder vier Elemente; und zwar vier Elemente genau dann, wenn $\theta/\bar{\theta}$ ein Charakter der Ordnung zwei ist.

3.4. Globale L-Ununterscheidbarkeit.

DEFINITION 3.4.1. *Eine automorphe Form π auf $G(A)$ heißt* **instabil**, *falls die Elemente ihres L-Pakets Π nicht alle mit gleicher Multiplizität im Raum der Spitzenformen auf $\tilde{G}(A)$ vorkommen.*

Es sei also $\pi = \pi(\theta)$ eine CM-Form mit $\pi \cong \pi \otimes \omega$, wobei der Charakter ω die quadratische Erweiterung E von F definiere. Ein $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_v)_v \in \Pi$ setzt sich aus den Elementen $\tilde{\pi}_v$ der lokalen L-Pakete Π_v zusammen, die im vorangegangenen Abschnitt untersucht wurden. An fast allen Stellen v ist $\tilde{\pi}_v$ die Klasse-Eins-Darstellung von $\tilde{G}(F_v)$.
Falls π auf einem Raum $H_\pi \subset L^2_o(G(\mathbb{Q}) \setminus G(A))$ realisiert ist, so ist für alle $g \in G(A)$ und alle K-endlichen $\phi \in H_\pi$ die Abbildung

$$x \longmapsto \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$$

eine L^2-Funktion auf der kompakten Gruppe A_F/F. Damit können wir

ϕ in eine Fourierreihe entwickeln:

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \quad = \quad \sum_{\xi \in F^*} \phi_1\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \tau(\xi x),$$

wobei $\tau : A_F/F \longrightarrow \mathbb{C}$ ein additiver Charakter ist. Den Raum der ersten Fourierkoeffizienten ϕ_1 aller K-endlichen $\phi \in H_\pi$ bezeichnet man als das **Whittaker-Modell** von π:

$$\mathcal{W}(\pi, \tau) \subset Ind(G(A), N(A), \tau).$$

Dabei bezeichne $N(A) \subset G(A)$ das unipotente Radikal. Die Heckealgebra von $G(A)$ operiert auf $\mathcal{W}(\pi, \tau)$ durch Rechtskonvolution. Diese Darstellung ist äquivalent zu π. Umgekehrt erhält man aus einem Raum $\mathcal{W}(\pi, \tau) \subset Ind(G(A), N(A), \tau)$ durch die Fourierreihenentwicklung einen Raum H_π von automorphen Formen. Betrachte die Gruppe

$$G^+(A) := \left\{ g \in G(A) \mid \det g \in N_{E/F} I_E \right\},$$

dann hat $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q}) \subset G(A)$ den Index 2. Nach Lemma 3.2.2. zerfällt

$$\pi \mid G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q}) \quad = \quad \pi^+ \oplus \pi^-$$

in zwei irreduzible Komponenten. Damit zerlegt sich

$$\mathcal{W}(\pi, \tau) \quad = \quad \mathcal{W}(\pi^+, \tau) \oplus \mathcal{W}(\pi^-, \tau),$$

wobei π^+ auf dem Raum $\mathcal{W}(\pi^+, \tau)$ aller Funktionen mit Träger in $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q})$ realisiert ist, π^- auf dem Komplement.

LEMMA 3.4.2. *Die Darstellungen π^+ und π^- sind jeweils auf genau einem Unterraum von $Ind(G(A), N(A), \tau)$ realisiert, nämlich $\mathcal{W}(\pi^+, \tau)$ bzw. $\mathcal{W}(\pi^-, \tau)$.*

Beweis: Die Heckealgebra von $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q})$ operiert auf den Räumen $\mathcal{W}(\pi^+, \tau)$ und $\mathcal{W}(\pi^-, \tau)$ durch die beiden nicht äquivalenten Darstellungen π^+ und π^-. Wir müssen die Eindeutigkeit dieser Räume zeigen. Angenommen, π^+ oder π^- kämen in der Restriktion einer anderen Darstellung $\acute{\pi}$ von $G(A)$ auf $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q})$ vor, dann gibt es wie in Lemma 3.2.3. einen Charakter λ von $G(A)$ mit $\pi \cong \acute{\pi} \otimes \lambda$. Da λ trivial auf $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q})$ ist, ist $\lambda = \omega$ und $\pi \cong \acute{\pi}$. Damit folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit des Whittakermodells für $G(A)$.

SATZ 3.4.3. *Die Darstellung π^+ ist eine automorphe Form auf $G^+(A) \cdot G(\mathcal{Q})$, während π^- nicht automorph ist. Die CM-Formen auf $G(A)$ sind also instabil.*

Beweis: Es sei $\pi^\pm$ eine der beiden Darstellungen π^+ oder π^-. Betrachte die Abbildungen:

$$\mathcal{F}_{1,\pm}^{-1}: \quad \mathcal{W}(\pi_f^\pm, \tau) \longrightarrow H_{\pi^\pm} \subset L_o^2(G(\mathcal{Q}) \setminus G^+(A)G(\mathcal{Q}))$$
$$\phi_1 \longmapsto \phi,$$

wobei

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \sum_{\xi \in F^\bullet} \phi_1\left(\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \tau(\xi x) \quad \text{ist}$$

für $x \in A_F$ und $g \in G^+(A)$. Es ist $\mathcal{F}_{1,+}^{-1}$ ein Isomorphismus und $\mathcal{F}_{1,-}^{-1}$ die Nullabbildung. Da es nach dem vorangegangenen Lemma keinen anderen Raum in $Ind(G(A), N(A), \tau)$ geben kann, der Fourierkoeffizienten für π^+ und π^- liefert, folgt die Aussage.

Schränkt man π^+ und π^- auf $\tilde{G}(A)$ ein, so zerfallen diese Darstellungen in unendlich viele Komponenten. Damit bekommen wir eine Partition des L-Pakets

$$\Pi \quad = \quad \Pi^+ \cup \Pi^-.$$

$\tilde{\pi}^+ \in \Pi^+$ ist also realisiert auf Funktionen $\phi_1 \in \mathcal{W}(\pi, \tau)$, die ihren Träger in $G^+(A) \cdot G(Q)$ haben, die Darstellungen $\tilde{\pi}^- \in \Pi^-$ auf Funktionen mit Träger außerhalb $G^+(A) \cdot G(Q)$. Die Darstellungen $\tilde{\pi}^+$ sind automorphe Formen auf $\tilde{G}(A)$, die $\tilde{\pi}^-$ sind nicht automorph.

BEMERKUNG:
Wähle ein $c \in C$ mit $\omega(\det c) = -1$. Schränkt man π nicht auf $\tilde{G}(A)$, sondern auf $c.\tilde{G}(A)$ ein, so sind $\tilde{\pi}^- \in \Pi^-$ automorphe Formen auf $c.\tilde{G}(A)$, die Darstellungen $\tilde{\pi}^+ \in \Pi^+$ sind nicht automorph. Damit ist die Rolle der beiden Hälften des L-Pakets vollkommen symmetrisch.

Wir notieren noch eine Konsequenz aus dem Lemma: wähle zu $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_v)_v \in \Pi$ an einer Stelle v ein $g \in G(F_v)$ mit $\omega(\det g) = -1$ und ersetze $\tilde{\pi}_v$ durch $\tilde{\pi}_v^g$, so bekommt man ein anderes Element $\tilde{\pi}_1 \in \Pi$. Aus dem Lemma folgt nun:

COROLLAR 3.4.4. *Es ist entweder $\tilde{\pi}$ oder $\tilde{\pi}_1$ eine automorphe Form*

auf $\tilde{G}(A)$.

BEMERKUNG:

Hammond und Hirzebruch haben in (H-H) eine geometrische Ausprägung dieses Phänomens beschrieben. Im Abschnitt 4.5. soll hierauf näher eingegangen werden.

4. Der Beweis der Tate-Vermutungen

Ziel des Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes (für die Terminologie siehe Abschnitt 2.3.).

Theorem B. *Es sei $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ eine CM-Form definiert über $\mathbb{Q}(\pi_f)$, dann ist*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} Z_\infty((\pi_f)) \quad = \quad 2 \cdot [\mathbb{Q}(\pi_f) : \mathbb{Q}].$$

Für den Beweis des Theorems beschreiben wir zunächst die Betti-rationale Struktur von $H^2_A(S/\mathbb{C})$ mithilfe eines konkreten Modells.

4.1. Das Whittaker-Modell. Vergleiche hierzu (Ha). Es sei $\tau : A_F/F \longrightarrow \mathbb{C}$ ein additiver Charakter, $N(A) \subset G(A)$ das unipotente Radikal und

$$\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi,\tau) \subset \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\tau) := \{ \Psi : G(A) \to \mathbb{C} \mid \Psi(ng) = \tau(n)\Psi(g) \text{ für } g \in G(A), n \in N(A) \}$$

das Whittaker-Modell der automorphen Form π.
Dann zerlegt sich

$$\mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi,\tau) = \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi_\infty,\tau) \otimes \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi_f,\tau),$$

und wir bekommen analog zum Abschnitt 2.3.2.

$$\left(H^2_B(S) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\right)(\pi_f) \quad \cong \quad H^2(g, K_\infty, \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi_\infty,\tau)) \otimes \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi_f,\tau).$$

Nach Lemma 2.3.1. ist der Modul $\left(H_B^2(S)\otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}\right)(\pi_f)$ schon über $\mathbb{Q}(\pi_f)$ definiert. Wie sieht die zugehörige Galoisoperation auf dem Whittaker-Modell aus? Damit τ in sich überführt wird, müssen wir die Operation twisten: $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert via $Gal(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) \cong \hat{\mathbb{Z}}^* \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^*$ auf dem Charakter τ; es sei $t_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ das Bild von σ unter dem Reziprozitätsisomorphismus. Dann definiert

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : \mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}(\pi_f, \tau) &\longrightarrow \mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}(\pi_f^\sigma, \tau) \\ \Psi &\mapsto \Psi^{\tilde{\sigma}} \end{aligned}$$

mit $\Psi^{\tilde{\sigma}}(g_f) := \Psi\left(\begin{pmatrix} t_\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_f\right)^\sigma$ eine semi-lineare Operation von $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf $\mathcal{W}_{\bar{\mathbb{Q}}}(\tau)$, die mit der $G(A_f)$-Operation vertauscht. Zerlegt man nach der $\Pi_o(G(\mathbb{R}))$-Operation, so bekommt man für die isotypischen Komponenten wie in Abschnitt 2.3:

$$\left(H_B^2(S)\otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}\right)(\xi_\infty, \pi_f) \quad \cong \quad H_{B,\infty}^2(S)(\xi_\infty, \pi_f) \otimes H_{\pi_f}.$$

Dann kann man ein System von Isomorphismen

$$\mathcal{F}(\xi_\infty, \pi_f) : \left(H_B^2(S)\otimes_{\bar{\mathbb{Q}}} \bar{\mathbb{Q}}\right)(\xi_\infty, \pi_f) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{W}(\pi_f, \tau)$$

konstruieren, das $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-invariant ist:

$$\tilde{\sigma} \circ \mathcal{F} \quad = \quad \mathcal{F} \circ \sigma$$

für alle $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q)$. Natürlich werden die ξ_∞-Komponenten in sich überführt, da $Gal(\bar{Q}/Q)$ auf den Werten von ξ_∞, also ± 1, trivial operiert. Wir haben also folgendes kommutative Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} (H_B^2(S) \otimes_Q \bar{Q})(\xi_\infty, \pi_f) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\xi_\infty, \pi_f)} & \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tilde{\sigma} \\ (H_B^2(S) \otimes_Q \bar{Q})(\xi_\infty, \pi_f^\sigma) & \xrightarrow{\mathcal{F}(\xi_\infty, \pi_f^\sigma)} & \mathcal{W}(\pi_f^\sigma, \tau) \end{array}$$

4.2. Die Kohomologie von $\tilde{S}$. Die Zerlegung $S = \coprod_{c \in C} \tilde{S}^c$ induzierte eine Zerlegung der Kohomologie:

$$H^2(S) \quad = \quad \bigoplus_{c \in C} H^2(\tilde{S}^c).$$

Die Kohomologie einer Zusammenhangskomponente zerlegt sich unter der Operation der Heckealgebra $\tilde{G}(A_f)$:

$$H_A^2(\tilde{S}^c) \quad = \quad \bigoplus_{\tilde{\pi}_f} H_A^2(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f).$$

Wir analysieren die Betti-rationale Struktur und die Hodge-Zerlegung von $H_A^2(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$.

4.2.1. Die Betti-rationale Struktur

Die Operation von $Aut(C/Q)$ faktorisiert über die endlich-dimensionalen

Räume $H^2_B(\tilde{S}^c_{K_f}) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C}$ und operiert daher mit endlichen Orbits auf der Menge der $\tilde{\pi}_f$. Damit ist $\left(H^2_B(\tilde{S}^c) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C}\right)(\tilde{\pi}_f)$ schon über einem endlichen algebraischen Zahlkörper $\mathcal{Q}(\tilde{\pi}_f)$ definiert, wobei wir ohne Einschränkung $\mathcal{Q}(\tilde{\pi}_f) \supset \mathcal{Q}(\pi_f)$ annehmen können. Wie in Abschnitt 4.1. zerlegen wir

$$\left(H^2_B(\tilde{S}^c) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C}\right)(\tilde{\pi}_f) \quad \cong \quad H^2_{B,\infty}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \otimes \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\tilde{\pi}_f, \tau)$$

und können auf $\mathcal{W}_{\bar{\mathcal{Q}}}(\tilde{\pi}_f, \tau)$ die getwistete Galoisoperation $\tilde{\sigma}$ betrachten. Aber im Unendlichen gibt es einen Unterschied: starke Multiplizität-Eins für G implizierte, daß π_f sich eindeutig durch die diskrete Serie π_∞ ergänzen ließ. Für $\tilde{G}$ kann man $\tilde{\pi}_f$ durch die vier irreduziblen Komponenten $\pi^{\pm}_{\infty,i}$ der Restriktion $\pi_\infty \mid \tilde{G}(\mathbb{R})$ ergänzen, also ist

$$\dim_{\mathbb{C}} H^2_{B,\infty}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \quad = \quad \text{mult}\,(\tilde{\pi}_f).$$

Damit meinen wir natürlich die Summe der Multiplizitäten aller Ergänzungen $\tilde{\pi}_\infty \otimes \tilde{\pi}_f$ im Raum der Spitzenformen auf $c.\tilde{G}(A)$. Das Hauptergebnis des Kapitel 3 besagt, daß für $\tilde{\pi}_f \in \Pi_f$, dem L-Paket einer CM-automorphen Form

$$\dim_{\mathbb{C}} H^2_{B,\infty}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \quad = \quad 2 \quad \text{ist.}$$

4.2.2. Die Hodge-Zerlegung

$H^2_{DR,\infty}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \quad \cong \quad H^2_{B,\infty}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$ ist ein Unterraum der g-K_∞-Kohomologie $H^2(g, K_\infty, \mathcal{W}_{\mathbb{C}}(\pi_\infty, \tau))$, für die wir in Abschnitt 2.3.2. eine

Basis $d_{\pm,\pm}$ angegeben hatten. Diese Basiselemente entsprechen den Erzeugenden der irreduziblen Komponenten $\pi^{\pm}_{\infty,i}$, i = 1,2 der Restriktion $\pi_\infty \mid \tilde{G}(\mathbb{R})$. Damit bekommen wir

SATZ 4.2.2.

$$\left(H^2_B(\tilde{S}^c) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\right)(\tilde{\pi}_f) \quad \cong \quad \begin{cases} H^{2,0}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \oplus H^{0,2}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) & \text{oder} \\ \\ H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f), \end{cases}$$

je nachdem, ob $\pi^{+}_{\infty,1} \otimes \pi^{+}_{\infty,2} \otimes \tilde{\pi}_f$ *und* $\pi^{-}_{\infty,1} \otimes \pi^{-}_{\infty,2} \otimes \tilde{\pi}_f$ *automorph sind oder nicht.*

Beweis : Nach dem Corollar 3.4.4. kommen z.B. $\pi^{+}_{\infty,1} \otimes \pi^{+}_{\infty,2} \otimes \tilde{\pi}_f$ und $\pi^{+}_{\infty,1} \otimes \pi^{-}_{\infty,2} \otimes \tilde{\pi}_f$ mit verschiedenen Multiplizitäten im Raum der Spitzenformen auf $c.\tilde{G}(A)$ vor, die eine mit Eins, die andere mit Null. Damit folgt die Aussage.

COROLLAR 4.2.3. *Der Raum* $H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$ *ist als Unterraum der Betti-Kohomologie über* $\mathbb{Q}(\tilde{\pi}_f)$ *definiert.*

BEMERKUNG :

Diese Anwendung der Instabilität von CM-Formen ist der entscheidende Schritt im Beweis des Theorems B. Im nächsten Abschnitt müssen wir diese Information über $H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$ zu einer Information über $H^{1,1}(S)(\pi_f)$ zusammensetzen.

4.3. Der Beweis der Rationalität. Wir bezeichnen wie oben mit Π_f den endlichen Anteil des L-Pakets einer automorphen Form π vom CM-Typ.

DEFINITION. *Für $c \in C$ sei $\Pi_f^c \subset \Pi_f$ die Teilmenge aller $\tilde{\pi}_f$, für die $H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$ ungleich Null ist.*

Es ist also

$$\Pi_f^c = \begin{cases} \Pi_f^+ & \text{falls} \quad \omega(\det c) = -1 \\ \Pi_f^- & \text{falls} \quad \omega(\det c) = +1 \end{cases}$$

SATZ 4.3.1. *Für $c \in C$ und $\sigma \in Gal(\bar{Q}/Q)$ ist*

$$(\Pi_f^\sigma)^c \quad = \quad (\Pi_f^c)^\sigma ,$$

wobei Π_f^σ das L-Paket von π_f^σ bezeichne.

Mit anderen Worten : für $\tilde{\pi}_f \in \Pi_f$ mit $H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f) \neq 0$

ist auch $H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f^\sigma) \neq 0.$

Beweis : Wir nehmen c = 1 an und betrachten das Whittaker-Modell

$$\mathcal{W}(\tilde{\pi}_f, \tau) \quad \subset \quad \mathcal{W}(\pi_f, \tau)$$

von $\tilde{\pi}_f$. Wir führen die Galoisoperation auf dem L-Paket auf die bekannte Operation auf dem Whittaker-Modell zurück. Es ist $\tilde{\pi}_f \in \Pi_f^1$

genau dann der Fall, wenn $\pi_{\infty,1}^{+} \otimes \pi_{\infty,2}^{-} \otimes \tilde{\pi}_f$ und $\pi_{\infty,1}^{-} \otimes \pi_{\infty,2}^{+} \otimes \tilde{\pi}_f$ automorph sind. Bezeichne mit $\tilde{\pi}$ eine von diesen beiden Darstellungen, dann ist die Automorphie von $\tilde{\pi}$ gleichbedeutend damit, daß der Träger aller Funktionen $\Psi \in \mathcal{W}(\tilde{\pi}, \tau)$ in $G(\mathbb{Q}) \cdot G^{+}(A)$ liegt, vergleiche Abschnitt 3.4. Um den Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, daß der Träger von $\Psi^{\tilde{\sigma}}$ wieder in $G(\mathbb{Q}) \cdot G^{+}(A)$ liegt. Die Galoisgruppe $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert via $t_\sigma \in \check{\mathbb{Z}}^* = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$ auf den Argumenten von Ψ. Wir liften t_σ nach I_F, bezeichnen seine Restklasse in I_F/F^* wieder mit t_σ und zeigen, daß $t_\sigma \in N_{E/F}(I_E/E^*)$ ist. Dazu betrachten wir das Diagramm der Ideleklassengruppen

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & I_E/E^* & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
I_{F_0}/F_0^* & & I_{F_1}/F_1^* & & I_F/F^* \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & I_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^* & &
\end{array}
$$

Es gibt $t_i \in I_{F_i}/F_i^*$ mit $N_{F_0/\mathbb{Q}}(t_0) \cdot N_{F_1/\mathbb{Q}}(t_1) = t_\sigma$. Dann ist

$$N_{E/F}(t_0 \cdot t_1) = t_\sigma,$$

also die Behauptung.

Es sei wie oben $\pi \cong \pi \otimes \omega$ eine CM-Form und λ ein endlicher Charakter auf $I_{F,f}$, dann haben die (für $\lambda \neq \omega$ nicht isomorphen) $G(A_f)$-

Darstellungen π_f und $\pi_f \otimes \lambda$ dieselbe Restriktion auf $\tilde{G}(A_f)$ und damit dasselbe L-Paket Π_f. Um die Multiplizitäten der zugehörigen isotypischen Komponenten richtig zu zählen, bezeichnen wir mit $\mathbf{\Lambda}$ die Menge der endlichen Charaktere auf $I_{F,f}$ modulo der von ω erzeugten Untergruppe. Wir setzen

$$\mathcal{Q}(\Pi_f) \quad := \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{Q}(\pi_f \otimes \lambda)$$

als den Definitionskörper des L-Pakets. Dann gilt:

COROLLAR 4.3.2. *(i) Es ist*

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H^{1,1}(S)(\pi_f \otimes \lambda) \quad = \quad \bigoplus_{c \in C} \bigoplus_{\tilde{\pi}_f \in \Pi_f^c} (H_B^2(\tilde{S}^c) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C})(\tilde{\pi}_f)$$

über $\mathcal{Q}(\Pi_f)$ *definiert.*

(ii) Es ist $H^{1,1}(S)(\pi_f)$ *über* $\mathcal{Q}(\pi_f)$ *definiert.*

Beweis : (i) Für $\tilde{\pi}_f \in \Pi_f^c$ ist

$$(H_B^2(\tilde{S}^c) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C})(\tilde{\pi}_f) \quad = \quad H^{1,1}(\tilde{S}^c)(\tilde{\pi}_f)$$

über $\mathcal{Q}(\tilde{\pi}_f) \supset \mathcal{Q}(\Pi_f)$ definiert. Nach dem Satz ist $\tilde{\pi}_f^\sigma$ wieder in Π_f^c für alle $\sigma \in Gal(\bar{\mathcal{Q}}/\mathcal{Q}(\Pi_f))$.

(ii) Es ist

$$H^{1,1}(S)(\pi_f) \quad = \quad (H_B^2(S) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C})(\pi_f) \cap \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H^{1,1}(S)(\pi_f \otimes \lambda)$$

über $\mathcal{Q}(\Pi_f).\mathcal{Q}(\pi_f) = \mathcal{Q}(\pi_f)$ definiert.

COROLLAR 4.3.3. *(i) Es ist*

$$\bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\pi_f)/\mathbb{Q})} H^{1,1}(S)(\pi_f^\sigma)$$

als Unterraum der Betti-Kohomologie über $\mathbb{Q}$ definiert.

(ii)

$$\mathcal{H}Z_\infty((\pi_f)) = \Big(\bigoplus_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\pi_f)/\mathbb{Q})} H^{1,1}(S)(\pi_f^\sigma) \Big) \otimes (\mathbb{C} \times A_f), \quad \textit{also}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}Z_\infty((\pi_f)) = 2 \cdot [\mathbb{Q}(\pi_f) : \mathbb{Q}].$$

Beweis : (i) folgt direkt aus Satz 4.3.1. zusammen mit Corollar 4.3.2., und (ii) folgt aus der Definition der Hodge-Zykeln in Abschnitt 2.2. Damit ist Theorem B bewiesen.

SATZ 4.3.4. (Tate-Vermutungen, 1. Teil). *Es ist für eine automorphe Form π*

$$\mathcal{T}Z_\infty((\pi_f)) = \mathcal{H}Z_\infty((\pi_f)).$$

Damit sind alle Tate-Zykel algebraisch.

Beweis : Dies folgt für CM-Formen π aus den Theoremen A und B und wurde für die übrigen automorphen Formen von (HLR) bewiesen.

4.4. Die Zetafunktion. Wir müssen noch die Aussage über die Polordnung der Zetafunktion von S_{K_f} im Punkte s = 2 beweisen. Wir verwenden die Notation von Abschnitt 2.2.

SATZ 4.4.1.(Tate-Vermutungen, 2. Teil). *Sei π eine automorphe Form vom CM-Typ, die über der Erweiterung $F_1(\chi)$ einen zweidimensionalen Raum von Tate-Zykeln liefert. Dann ist die Polordnung von*

$$L_{F_1(\chi)}\left(s, \left(\rho(\pi) \mid H^2_{et}(S_{K_f} \times \bar{\mathbb{Q}})\right)\right) \quad \text{in} \quad s = 2 \quad \text{gleich} \quad \text{zwei.}$$

Beweis : Es war

$$L_{F_1(\chi)}(s, \rho(\pi)) = \prod_p L_p(s, \rho(\pi)), \text{ wobei}$$

$$L_p(s, \rho(\pi)) = \left(\det\left(Id - \rho(\pi)(\Phi_p^{-1})Np^{-s}\right)\right)^{-1}, \text{ das ist aber}$$

$$= \left(\det\left(Id - \operatorname{diag}(\theta\theta^\sigma, \theta\bar{\theta}^\sigma, \bar{\theta}\theta^\sigma, \bar{\theta}\bar{\theta}^\sigma)(\Phi_p^{-1})Np^{-s}\right)\right)^{-1}.$$

Nun ist an einer unverzweigten Stelle p

$$\theta\bar{\theta}^\sigma(\Phi_p) = \bar{\theta}\theta^\sigma(\Phi_p) = Np,$$

da diese Charaktere genau diejenigen vom Typ α^{-1} über $F_1(\chi)$ sind. Damit ist $L(s, \rho(\pi))$ das Produkt zweier Dedekindscher Zetafunktionen $\zeta(s-1)$ zu $F_1(\chi)$ und zweier Hecke-L-Funktionen zu nicht-trivialen Charakteren.

4.5. Signaturdefekte.

In diesem Abschnitt sei $K_f \subset G(A_f)$ die volle Modulgruppe. Bezeichne mit $\operatorname{sign}(S_{K_f})$ die Signatur der Fläche S_{K_f}.

DEFINITION. *Wir nennen die algebraischen Zykel, die in der isotypischen Komponente einer CM-automorphen Form liegen,* **CM-Zykel**:

$$CMZ(S_{K_f}) \quad := \quad \bigoplus_{\pi_f} \tau Z_\infty(\pi_f),$$

wobei sich die Summe über alle unverzweigten CM-Formen erstreckt.

Definiere eine Partition $C = C^+ \cup C^- = I_F/F^*(\mathbb{R}^\times_{>0} \times \det K_f)$ durch $C^\pm := \{c \in C \mid c_{\infty,1}.c_{\infty,2} = \pm 1\}$ und setze

$$S^+_{K_f} := \coprod_{c \in C^+} \hat{S}^c_{K^c_f} \quad \text{und} \quad S^-_{K_f} := \coprod_{c \in C^-} \hat{S}^c_{K^c_f}.$$

Dabei ist $K^c_f := cK_f c^{-1} \cap \tilde{G}(A_f)$. Dann gilt:

SATZ 4.5.1.

$$\dim CMZ(S_{K_f}) \quad = \quad -\operatorname{sign}(S^+_{K_f}) \quad = \quad \operatorname{sign}(S^-_{K_f}).$$

Beweis : Es gibt einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus zwischen den beiden Flächen $S^-_{K_f}$ und $S^-_{K_f}$. Daher haben sie entgegengesetzte Signatur und unterschiedlich viele Spitzenformen. Nach Theorem 4.1. von (H-H) ist die Differenz der Dimensionen der holomorphen Spitzenformen auf $S^-_{K_f}$ und $S^-_{K_f}$ gleich $-\frac{1}{2}\operatorname{sign}(S^\Gamma_{K_f})$. In Satz 3.4.3. hatten wir gezeigt, daß CM-Formen instabil sind und somit zu dieser Differenz beitragen. Da umgekehrt instabile Formen τ Hodge-Zykeln liefern, müssen diese τ schon CM-Formen sein. Dies kann man natürlich auch

direkt mit der Selbergschen Spurformel zeigen (L-L). Da jede CM-Form genau zwei CM-Zykel liefert, folgt die Aussage.

Hammond und Hirzebruch beweisen in ihrer Arbeit (H-H), daß die oben erwähnte Differenz der Dimensionen der Spitzenformen auf $S^-_{K_f}$ und $S^+_{K_f}$ gleich dem Signaturdefekt der Fläche ist. Für diesen Signaturdefekt kann man eine einfache Formel angeben, die für uns dann die Dimension der CM-Zykeln ausdrückt. Dazu sei $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ferner $h(d_i)$ die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d_i})$ und $u(d_i)$ die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-d_i})$. Dann gilt:

COROLLAR 4.5.2. *(i) Für* $d < 6$ *ist* $\dim CMZ(S_{K_f}) = 0$.
(ii) Für $d \geq 6$ *setze*

$$w := \sum_{d_1 d_2 = d} \frac{h(d_1)h(d_2)}{u(d_1)u(d_2)}.$$

Dann ist

$$\dim CMZ(S_{K_f}) = \begin{cases} 4w + \frac{1}{3}h(-\frac{d}{3}) & \text{für } d \equiv 0 \mod 3 \\ 4w & \text{für } d \equiv 1, 2 \mod 3. \end{cases}$$

Dies folgt aus (H-H), Theorem 2.1. zusammen mit dem Satz 4.5.1.

5. Automorphe Perioden

Im Kapitel 2 hatten wir die geometrischen Perioden erwähnt, die beim Vergleich der Betti- und de Rham-rationalen Strukturen entstehen. In diesem Kapitel wollen wir eine Relation zwischen den automorphen Perioden einer CM-Form herleiten, wie sie in (Ha) definiert sind. Diese automorphen Perioden sind über den Vergleich zweier Isomorphismen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{FK}$ definiert. Dabei entspricht $\mathcal{F}$ der Betti-rationalen Struktur und $\mathcal{F}_{FK}$ der de Rham-rationalen Struktur. In einer späteren Arbeit soll ein Vergleich zwischen den geometrischen und den automorphen Perioden durchgeführt werden und ihre Beziehung zu Motiven von Heckecharakteren untersucht werden.

Zunächst sei π eine beliebige automorphe Form und $\mathcal{Q}(\pi_f)$ ihr Definitionskörper, siehe 2.3.1. Wir kürzen $\left(H_B^2(S) \otimes_{\mathcal{Q}} \mathbb{C}\right)(\pi_f)$ mit $H^2(\pi_f)$ ab.

Sprechweise. *In diesem Kapitel nennen wir eine komplexe Zahl* **rational**, *falls sie in* $\mathcal{Q}(\pi_f)$ *liegt. Ebenso nennen wir einen Unterraum von* $H^2(\pi_f)$ **Betti-rational**, *falls er über* $\mathcal{Q}(\pi_f)$ *definiert ist.*

Es sei $\tau : A_F/F \longrightarrow \mathbb{C}$ ein additiver Charakter und $\mathcal{W}(\pi, \tau) = \mathcal{W}(\pi_\infty, \tau) \otimes \mathcal{W}(\pi_f, \tau)$ das Whittaker-Modell von π. Der Raum $\mathcal{W}(\pi_f, \tau)$ ist über $\mathcal{Q}(\pi_f)$ definiert; es sei $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}(\pi_f)}(\pi_f, \tau)$ der Unterraum aller Funktionen in $\mathcal{W}(\pi_f, \tau)$ mit Werten in $\mathcal{Q}(\pi_f)$. Der Isomorphismus

$$\mathcal{F}(\xi_\infty, \pi_f) : H^2(\xi_\infty, \pi_f) \longrightarrow \mathcal{W}(\pi_f, \tau)$$

aus Kapitel 4.1. identifiziert die Betti-rationale Struktur mit der rationalen Struktur des Whittaker-Modells: Wähle eine Basis $\omega(\xi_\infty)$, $\xi_\infty \in \Pi_0(G(\mathbb{R}))^{dual}$ von $H^2(g, K_\infty, H^\infty_{\pi_\infty})$ und betrachte die Isomorphismen

$$\mathcal{F}_{FK}(\xi_\infty, \pi_f) \; : \; H^2(\xi_\infty, \pi_f) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}\,.\omega(\xi_\infty) \otimes \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \; \cong \; \mathcal{W}(\pi_f, \tau),$$

die von der ersten Fourierkoeffizientenabbildung induziert sind, vergleiche (Ha), III.

Es seien s und t zwei Vorzeichen. Bezeichne mit $\xi^{s,t}_\infty$ diejenige Abbildung von $\Pi_0(G(\mathbb{R}))$ nach $\{\pm 1\}$, die an den beiden Stellen die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf $s.1$ bzw. $t.1$ abbildet. Wir kürzen $\mathcal{F}(\xi^{s,t}_\infty, \pi_f)$ und $\mathcal{F}_{FK}(\xi^{s,t}_\infty, \pi_f)$ zu $\mathcal{F}^{s,t}(\pi_f)$ und $\mathcal{F}^{s,t}_{FK}(\pi_f)$ ab. Die Inversen der Isomorphismen $\mathcal{F}^{s,t}_{FK}(\pi_f)$ definieren vier injektive Abbildungen

$$I^{s,t}(\pi_f) \; : \; \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \; \longrightarrow \; H^2(\pi_f).$$

DEFINITION. *Es seien s und t zwei Vorzeichen. Die* **Perioden** *der automorphen Form π sind die komplexen Zahlen $\Omega^{s,t}(\pi_f)$ mit der Eigenschaft, daß*

$$\Omega^{s,t}(\pi_f) \,.\, \mathcal{F}^{s,t}_{FK}(\pi_f)(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}(\pi_f)}(\pi_f, \tau))$$

Betti-rational ist.

Da wir die $\Pi_0(G(\mathbb{R}))$-Operation auf der Hodge-Zerlegung der Betti-

Kohomologie kennen, wissen wir, daß

$$I^{+,+}(\pi_f) + I^{-,-}(\pi_f) : \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \longrightarrow H^{1,1}(\pi_f) \quad \text{und}$$
$$I^{+,-}(\pi_f) + I^{-,+}(\pi_f) : \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \longrightarrow H^{1,1}(\pi_f).$$

Damit ist also auch

$$\Omega^{+,+}(\pi_f)\left(I^{+,+}(\pi_f) + I^{-,-}(\pi_f)\right) : \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \longrightarrow H^{1,1}(\pi_f) \quad \text{und}$$
$$\Omega^{+,-}(\pi_f)\left(I^{+,-}(\pi_f) + I^{-,+}(\pi_f)\right) : \mathcal{W}(\pi_f, \tau) \longrightarrow H^{1,1}(\pi_f).$$

Es folgt sofort der

SATZ 5.1. *Die Betti-Rationalität von $H^{1,1}(\pi_f)$ ist äquivalent zu der Rationalität der Quotienten $\frac{\Omega^{+,+}(\pi_f)}{\Omega^{-,-}(\pi_f)}$ und $\frac{\Omega^{+,-}(\pi_f)}{\Omega^{-,+}(\pi_f)}$.*

COROLLAR 5.2. *Es sei π eine CM-Form. Dann sind die Quotienten $\frac{\Omega^{+,+}(\pi_f)}{\Omega^{-,-}(\pi_f)}$ und $\frac{\Omega^{+,-}(\pi_f)}{\Omega^{-,+}(\pi_f)}$ rational.*

Dies folgt aus dem Satz 5.1. und aus Theorem B.

LITERATUR

(B-B) W. Baily, A. Borel: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. of Math. (2), 84 (1966), p. 442 - 528.

(B-W) A. Borel, N. Wallach: Continuous Cohomology,

Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups.
PUP Annals of Mathematics Studies, No. 94.

(Bo) Automorphic L-Functions, in: (Co) II, p. 27 - 61.

(Co) Automorphic Forms, Representations and L-Functions.
Proc. of Symp. in Pure Math. vol 33, (1979) (Corvallis).

(De) P. Deligne: Valeurs de Fonction L et Periodes d'integrales.
in: (Co) II, p. 313 - 342.

(DMOS) P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih:
Hodge Cycles, Shimura Varieties and Motives.
Lecture Notes in Math. No. 900.
Wir beziehen uns nur auf den ersten Artikel von P. Deligne:
Hodge Cycles on Abelian Varieties.

(Ge) S. Gelbart: Automorphic Forms on Adele Groups.
PUP Annals of Mathematics Studies, No. 83.

(G-H) P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry.
John Wiley (1978).

(G-K) S. Gelbart, A. Knapp: L-Indistinguishability and R-Groups
for the special linear group.
Adv. in Math., 43 (1982), p. 101 - 121.

(H-H) W.F. Hammond, F. Hirzebruch:L-Series,
Modular Imbeddings and Signatures.
Math. Ann. 204 (1972), p. 263 - 270.

(Ha) G. Harder: General Aspects in the Theory of Modular
Symbols. Sem. d. Theo. d. Nombr. Paris 1981-82,

Birkhäuser PM 38, p. 73 - 88.

(HLR) G. Harder, R.P. Langlands, M. Rapoport:
Algebraische Zykeln auf Hilbert-Blumenthal-Flächen.
Jour. für die Reine und Angew. Math. 366, p. 53 - 120.

(H-V) F. Hirzebruch, A. van de Ven : Hilbert Modular Surfaces
and the Classification of Algebraic Surfaces.
Inv. Math. 23 (1974), p. 1 - 29.

(H-Z) F. Hirzebruch, D. Zagier: Intersection Numbers of Curves
on Hilbert Modular Surfaces.
Inv. Math. 36 (1976), p. 57 - 113.

(J-L) H. Jacquet, R.P. Langlands : Automorphic Forms on GL(2).
Lec. Notes in Math. No. 114.

(Lab) J. Labesse: L-indistinguishable Representations and the
Trace Formula for SL(2).
in: Lie Groups and their Representations,
Wiley (1975), p. 331 - 338.

(L-L) J. Labesse, R.P. Langlands: L-Indistinguishability for SL(2).
Can. J. 31, No.4 (1979), p. 726 - 785.

(La) R.P. Langlands: Base Change for GL(2).
PUP Annals of Mathematics Studies No. 96.

(Shi) G. Shimura: On canonical models of arithmetic quotients
of bounded symmetric domains.
Ann. of Math. 91 (1970), p. 114 - 222.

(Ta) J. Tate: Algebraic Cycles and Poles of Zetafunctions.

Proc. Conf. Purdue Univ. 1963,
Harper and Row, New York.

Lebenslauf

Ich, Christoph Klingenberg, wurde am 22. 1. 1961 in Eutin als zweites von vier Kindern geboren. Mein Vater ist von Beruf Pastor, und meine Mutter war bis zu meiner Geburt als Grundschullehrerin tätig. Von August 1967 bis Mai 1969 besuchte ich die Grundschule in Siebenbäumen, wo ich die zweite Klasse übersprang. Danach zogen wir nach Ratzeburg. Dort besuchte ich von 1970 bis 1979 die Lauenburgische Gelehrtenschule. In der Oberstufe wählte ich als Leistungsfächer Mathematik und Physik. Als Fremdsprachen lernte ich acht Jahre Englisch, vier Jahre Latein und drei Jahre Russisch. Im Juni 1979 bestand ich das Abitur. Im Januar 1979 wurde ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen.

Vom Oktober 1979 bis September 1981 studierte ich Mathematik (Diplom) mit Nebenfach Informatik an der Universität Hamburg und legte dort im April 1981 das Vordiplom ab. Seit Oktober 1981 studiere ich an der Universität Bonn.

Im Studienjahr 1983/84 studierte ich mit einem Stipendium der Rotary Foundation neun Monate an der Universität Princeton als graduate student. Meine Diplomarbeit über die Automorphismengruppen von Del Pezzo-Flächen habe ich unter Anleitung von Herrn Prof. Hirzebruch geschrieben. Im März 1985 bestand ich die Diplomprüfungen. Vom April 1985 bis zum November 1985 bekam ich ein Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes. Seit November 1985 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Köln angestellt.

Bonn, den 5. 3. 1986

Christoph Klingenberg